Corrigé exercice 65 :

1. a. Puisque $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ alors $\alpha_i - \beta_i \geq 0$. D'où $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} = (p_1^{\alpha_1 - \beta_1} \times p_2^{\alpha_2 - \beta_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k - \beta_k}) \times (p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k})$ et donc l'entier $p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$ divise n .
b. Soit d un diviseur de n . Soit p^{β_i} un diviseur de d , avec p premier. Alors, puisque $d \mid n$, par transitivité, p^{β_i} divise n . L'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers de n implique alors que p^{β_i} doit figurer dans cette décomposition. Donc p est l'un des p_i de la décomposition de n et $1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$. Ainsi, $d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$.
2. À chaque facteur p_k d'exposant α_k correspond $\alpha_k + 1$ branches. L'arbre de dénombrement possède donc $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \dots \times (\alpha_k + 1)$ extrémités, ce qui correspond au nombre de diviseurs de n .

Corrigé exercice 67 :

1. Notons $d = \text{PGCD}(n; m)$.

D'une part, d divise n donc $d = p_1^{\alpha'_1} \times p_2^{\alpha'_2} \times \dots \times p_k^{\alpha'_k}$ avec $0 \leq \alpha'_i \leq \alpha_i$.

D'autre part, d divise m donc $d = p_1^{\alpha'_1} \times p_2^{\alpha'_2} \times \dots \times p_k^{\alpha'_k}$ avec $0 \leq \alpha'_i \leq \beta_i$.

Or $\text{PGCD}(n; m)$ est le plus grand diviseur commun de m et n , d'où $\alpha'_i = \min(\alpha_i; \beta_i)$.

Ainsi, $\text{PGCD}(n; m) = p_1^{\min(\alpha_1; \beta_1)} \times p_2^{\min(\alpha_2; \beta_2)} \times \dots \times p_k^{\min(\alpha_k; \beta_k)}$.

2. Soit M un multiple commun de $n = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ et $m = p_1^{\beta_1} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$.

Comme $n \mid M$, alors, pour tout $i \in \{1; \dots; k\}$, $p_i^{\alpha_i} \mid M$. De même, comme $m \mid M$, alors, pour tout $i \in \{1; \dots; k\}$, $p_i^{\beta_i} \mid M$.

Donc, comme $\text{PPCM}(n; m)$ est le plus petit multiple commun de n et m donc

$\text{PPCM}(n; m) = p_1^{\max(\alpha_1; \beta_1)} \times p_2^{\max(\alpha_2; \beta_2)} \times \dots \times p_k^{\max(\alpha_k; \beta_k)}$.